ゆらぎのスケーリング則に関する確率モデル[1]

京都大学 情報学研究科 数理工学専攻　佐藤 彰洋[2]
慶應義塾大学 経営管理研究科　林 高樹[3]

金融市場の電子化の結果、リアルタイムで複数の金融商品に関する大量のデータを同時に観測できるようになってきている。しかしながら、このような大量のデータをそのまま理解することは困難であり、市場横断的 (クロスセクション) あるいは時間的な構造を考慮した多数変量モデルが必要とされている。

一方、金融市場における金融資産の収益率を記述するための有力な説明のひとつとして、正規混合仮説（より一般的には分布混合仮説）が提案されている [1, 2, 3, 4, 5, 6]。特に取引ボリュームや取引回数 (注文回数) と収益率との間に正の同時相関が存在することが報告されている [4, 5, 6]。他方, Clark[1] 以来, 時間変更 (time change) あるいは劣後化 (subordination) により、時間軸をトレーディング時間 (ビジネス時間) に変更したガウス過程を考えることにより, 対数収益率のファットテール性を再現できることが知られている。これらの研究では、取引ボリュームあるいは取引回数 (注文回数) を、市場に到着する観測不可能な情報到着の代理変数と見なす立場を取っている。

本研究では、多数の金融商品の収益率変動を記述する目的で、その第一段階として注文回数を記述するための市場参加者の行動生起の確率ゆらぎを考慮した多変量モデルを提案し、多数の金融商品の取引回数 (注文回数) 時系列で確認される平均と分散との間に成立するゆらぎのスケーリング則 [7] と共分散行列の再現を試みる.

N 種類の金融商品が M 人の市場参加者により取引される金融市場のモデルを考える。i 番目の金融商品を取引する参加者の人数を M_i と表記し, 相対頻度 $k_i = M_i/M$ により定義する。金融商品 i に参加する市場参加者は、このグループ固有の情報と市場共通の情報を知覚して、行動すると考える。そして, 商品の注文回数あるいは取引回数 n_i を、市場固有の情報到着確率 q $(0 \le q \le 1)$ とグループ固有の情報到着確率 q_i $(0 \le q_i \le 1)$ で指定される k_iM 個からなる Bernoulli 変数の和として $Bin(k_iM, q+q_i-qq_i)$ なる 2 項分布からサンプルする。ここで、q_i と q は、それぞれ, 確率密度関数 $G(q)$ と $G_i(q_i)$ からサンプルされる確率変数であると仮定する.

q, q_i, q_j が互いに独立であり、M が十分大きく $q+q_i-qq_i$ が十分小さいとすると、二項分布を Poisson 分布で近似することができ、n_i の平均値および n_i, n_j の共分散はそれぞれ

$$\langle n_j \rangle = K_j L N(\langle q \rangle + \langle q_j \rangle), \tag{1}$$

$$\mathrm{Cov}(n_l, n_m) = \begin{cases} K_l K_m L^2 N^2 \sigma_q^2 & (l \neq m) \\ K_l L N(\langle q \rangle + \langle q_l \rangle) + K_l^2 L^2 N^2 (\sigma_q^2 + \sigma_{q_l}^2) & (l = m) \end{cases}, \tag{2}$$

と得られる。ここで, $\langle q \rangle = \int_0^1 qG(q)dq$, $\langle q_l \rangle = \int_0^1 q_l G_l(q_l)dq_l$, $\sigma_q^2 = \int_0^1 (q-\langle q \rangle)^2 G(q)dq$, $\sigma_{q_l}^2 = \int_0^1 (q_l - \langle q_l \rangle)^2 G_l(q_l)dq_l$ である.

観測された時系列 $X_{j,\Delta t}(k)$ $(k=0,\ldots,Q-1)$ から商品 j のシェアを $K_j = \frac{\sum_{k=0}^{Q-1} X_{j,\Delta t}(k)}{\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{Q-1} X_{j,\Delta t}(k)}$ により推定し, $0 < R < Q$ を満す R を用いて実証的な平均値と共分散行列を $\langle X_{j,\Delta t}\rangle^{\mathrm{emp}}(s) = \frac{1}{R}\sum_{k=s}^{s+R-1} X_{j,\Delta t}(k)$, $\mathrm{Cov}^{\mathrm{emp}}_{lm,\Delta t}(s) = \frac{1}{R}\sum_{k=s}^{s+R-1}\Big(X_{l,\Delta t}(k) - \langle X_{l,\Delta t}\rangle^{\mathrm{emp}}(s)\Big)\Big(X_{m,\Delta t}(k) - \langle X_{m,\Delta t}\rangle^{\mathrm{emp}}(s)\Big)$

[1]この原稿は、経済物理学 2009 において発表したものである。

[2]E-mail: aki@i.kyoto-u.ac.jp
[3]E-mail:takaki@kbs.keio-u.ac.jp

により求める．平均と共分散に対しる実測値と理論値との間の最小 2 乗誤差を最小化するようにパラメータを得らぶと，$\Big(\langle q\rangle + \langle q_j\rangle\Big)(s) = \frac{\langle f_{j,\Delta t}\rangle^{\mathrm{emp}}(s)}{K_j S N}$, $\sigma_q^2(s) = \frac{\sum_{l=1}^{M}\sum_{m=l+1}^{M}\mathrm{Cov}^{\mathrm{emp}}_{lm,\Delta t}(s) K_l K_m}{S^2 N^2 \sum_{l=1}^{M}\sum_{m=l+1}^{M}(K_l K_m)^2}$, $\sigma^2_{q_j}(s) = \frac{\mathrm{Cov}^{\mathrm{emp}}_{jj,\Delta t}(s) - \langle f_{j,\Delta t}\rangle^{\mathrm{emp}}(s)}{K_j^2 S^2 N^2} - \sigma_q^2(s)$ を得る．外国為替市場で取引される 46 種類の通貨ペアに対する注文データ (1 分足) と東京証券取引所で取引される主要 30 証券に対する約定データ (3 分足) を用いて，パラメータの推計を行いスケーリング関係と共分散行列の比較を行った．計算の結果,(特に外国為替の注文データにおいて) 理論により実測をある程度再現できることがわかった．

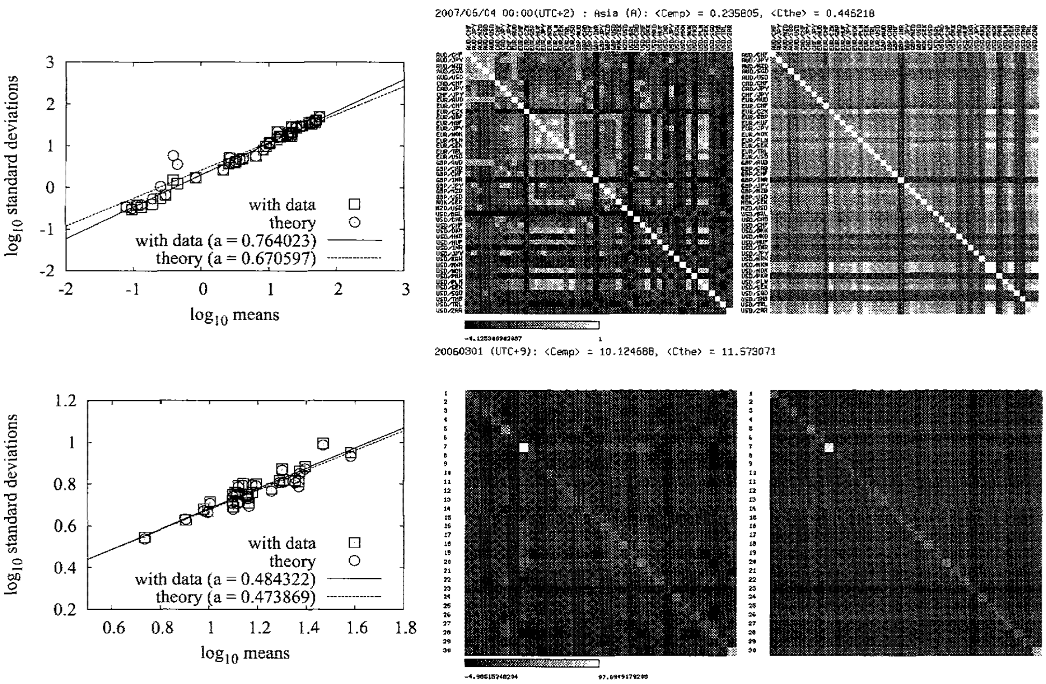

図 1: (上) 外国為替市場の 1 分当りの注文回数に対するゆらぎのスケーリング関係 (実測□と推定値○) と共分散行列 (左実測, 右推定). (下) 東京証券取引所 TopixCore30 の約定回数に対するゆらぎのスケーリング関係 (実測□と推定値○) と共分散行列 (左実測, 右推定).

参考文献

[1] P. Clark, Econometrica, **41**, 135 (1973)

[2] T. Tauchen, and M. Pitts, Econometric Society, **51**, 485 (1983)

[3] M. Richardson, and T. Smith, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **29**, 101 (1994)

[4] J. Karpo , Journal of Financial and Quantitative Analysis, **22**, 109 (1987)

[5] B. Mandelbrot and H.M. Taylor, Operations Research, **15**, 1057 (1967)

[6] T. Ane and H. Geman, Journal of Finance, **55**, 2259 (2000)

[7] Z. Eisler, I. Bartos, and J. Kertész, Advances in Physics, **57**, 89 (2008)